МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

Т.В. Крюкова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методическое пособие для студентов направлений

КТМ и ТМО дневной формы обучения

Рубцовск 2014

УДК 517.9

Крюкова Т.В. Теория вероятностей. Методическое пособие для студентов направлений КТМ и ТМО дневной формы обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2014. - 45 с.

Предлагаемая методическая разработка содержит теоретический материал по одному из разделов математики: «Теория вероятностей». В работе приведено большое количество примеров, которые являются образцами решения задач по теории вероятностей.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 5 от 25.12.2014 г.

Рецензент: к.т.н., доцент А.В. Шашок

СОДЕРЖАНИЕ

1.СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под ***событием*** в теории вероятностей понимают любой факт, который может произойти или не произойти в результате опыта со случайным исходом. Самый простой результат такого опыта (например, появление "орла" или "решки" при бросании монеты, попадание в цель при стрельбе, появление туза при вынимании карты из колоды, случайное выпадение числа при бросании игральной кости и т.д.) называется ***элементарным событием***.

Множество всех элементарных событий E называется ***пространством элементарных событий***. Так, при бросании игральной кости это пространство состоит из шести элементарных событий, а при вынимании карты из колоды – из 52. Событие может состоять из одного или нескольких элементарных событий, например, появление двух тузов подряд при вынимании карты из колоды или выпадение одного и того же числа при трёхкратном бросании игральной кости. Тогда можно определить ***событие*** как произвольное подмножество пространства элементарных событий.

Достоверным событием называется всё пространство элементарных событий. Таким образом, достоверное событие – это событие, которое обязательно должно произойти в результате данного опыта. При бросании игральной кости таким событием является её падение на одну из граней.

Невозможным событием ($\varnothing$) называется пустое подмножество пространства элементарных событий. То есть невозможное событие не может произойти в результате данного опыта. Так, при бросании игральной кости невозможным событием является её падение на ребро.

События A и B называются ***тождественными*** ($A=B$), если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.

Говорят, что событие A ***влечёт за собой событие*** B ($A\subset B$), если из условия *"произошло событие A"* следует *"произошло событие B"*.

Событие C называется ***суммой событий*** A и B ($C=A\cup B$), если событие C происходит тогда и только тогда, когда происходит либо A, либо B.

Событие C называется ***произведением событий*** A и B ($C=A\cap B$), если событие C происходит тогда и только тогда, когда происходит и A, и B.

Событие C называется ***разностью событий*** и B ($C=A-B$), если событие C происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B.

Событие A называется ***противоположным*** событию A, если не произошло событие A. Так, промах и попадание при стрельбе – противоположные события.

События A и B называются ***несовместными*** ($A\cap B=\varnothing$), если их одновременное появление невозможно. Например, выпадение и "решки", и "орла" при бросании монеты.

Если при проведении опыта могут произойти несколько событий и каждое из них по объективным условиям не является более возможным, чем другое, то такие события называются ***равновозможными***. Примеры равновозможных событий: появление двойки, туза и валета при вынимании карты из колоды, выпадение любого из чисел от 1 до 6 при бросании игральной кости и т.п.

События A_1, …, A_n образуют **полную группу**, если в результате опыта кроме этих событий ничего не может произойти.

Пример 1.1. Стрелок произвел 3 выстрела по мишени. Элементарные события:

A_1 - попал при 1-м выстреле;

A_2 - попал при 2-м выстреле;

A_3 - попал при 3-м выстреле;

$\overline{A_1}$ - не попал при 1-м выстреле;

$\overline{A_2}$ - не попал при 2-м выстреле;

$\overline{A_3}$ - не попал при 3-м выстреле.

Выразим через A_1, A_2, A_3 и их отрицания следующие события:

а) одно попадание: $A = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$,

б) три промаха: $B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$,

в) три попадания: $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$,

г) хотя бы один промах: $D = A + B + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$ или $D = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$,

д) не менее двух попаданий: $E = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + C$,

е) не больше одного попадания: $F = A + B$,

ж) попадание в мишень после 1-го выстрела: $G = \overline{A_1}\ \ \overline{A_2} A_3 + A_2 \overline{A_3} + A_2 A_3$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – раздел дискретной математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

Правило произведения. Пусть из некоторого конечного множества

1-й объект можно выбрать k_1 способами,

2-й объект - k_2 способами,

……………………………………,   (2.1)

n-й объект - k_n способами.

Тогда произвольный набор перечисленных *n* объектов из данного множества можно выбрать $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$ способами.

Пример 2.1. Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решение. В десятичной системе исчисления десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На первом месте может стоять любая из девяти цифр (кроме нуля). На втором месте любая из оставшихся 9 цифр, кроме выбранной. На последнем месте любая из оставшихся 8 цифр. По правилу произведения $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ трехзначных чисел имеют разные цифры.

Правило суммы. При выполнении условий (2.1) любой из объектов можно выбрать $k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n$ способами.

Пример 2.2. Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих, 3 зеленых карандаша?

Решение. Один карандаш, по правилу суммы, можно выбрать 5+7+3=15 способами.

Обычно в комбинаторике рассматривается идеализированный эксперимент по выбору наудачу k элементов из n. При этом элементы: а) не возвращаются обратно (схема выбора без возвращений); б) возвращаются обратно (схема выбора с возвращением).

1. ***Схема выбора без возвращений***.

Размещением из n элементов по k называют любой упорядоченный набор из k элементов, принадлежащих n элементному множеству. Различные размещения отличны друг от друга или порядком элементов, или составом.

Число *размещений из n элементов по к* обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad (2.2)$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, $1! = 1$, $0! = 1$.

Пример 2.3. В соревнованиях участвуют 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е, 3-е место. Сколько существует различных вариантов?

Решение. Число различных вариантов равно:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720.$$

Перестановкой из n элементов называют размещение из n элементов по n. Число перестановок из n элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \qquad (2.3)$$

Пример 2.4. Сколько существует способов расстановки 10 книг на полке?

Решение. Общее число способов расстановки определяется как число перестановок из 10 элементов и равно $P_{10} = 10! = 3628800$.

Сочетанием из n элементов по k называется любой набор из k-элементов, принадлежащих n элементному множеству. Различные сочетания отличаются друг от друга только составом.

Число сочетаний из n элементов по $к$ обозначается C_n^k и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (2.4)$$

Пример 2.5. Сколько существует способов выбора трех человек из десяти.

Решение. В данном случае при выборе для нас важен только состав наборов по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от примера 2.3 число способов выбора подсчитаем по формуле сочетаний:

$$C_{10}^{3} - \frac{10}{10-3\ !3!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

2. ***Схема выбора с возвращениями***.

Если при выборе к элементов из n - элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это ***размещения с повторениями***. Число размещений с повторениями

$$\overline{A_n^k} = n^k. \tag{2.5}$$

Пример 2.6. В гостинице 10 комнат, каждая из которых может разместить четырех человек. Сколько существует вариантов размещения прибывших четырех гостей?

Решение. Каждый следующий гость из 4 может быть помещен в любую из 10 комнат, поэтому общее число размещений, по формуле размещений с повторениями, равно $\overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10000$.

Если при выборе k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это ***сочетания с повторениями***. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{n+k-1\ !}{n-1\ !k!}. \tag{2.6}$$

Пример 2.7. В магазине продается 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определить число возможных заказов.

Решение. Число равновозможных заказов по формуле (2.6) равно

$$C_{10+3-1}^3 = \overline{C}_{12}^3 = \frac{12!}{12-3\ !3!} = \frac{9!10\cdot 11\cdot 12}{9!3!} = 220.$$

3. ***Схема упорядоченных разбиений***.

Пусть $k_1, k_2, ..., \mathrm{k}_r$ - целые числа, такие, что $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$, $k_i \geq 0$ $i = 1,\ 2,\ ...,\ r$. Число способов, которыми генеральную совокупность из n элементов можно разделить на r упорядоченных частей (r подмножеств или r групп), из которых первая содержит k_1 элементов, вторая - k_2 элементов и r-я - k_r элементов, обозначается $C_n\ k_1, k_2, ..., \mathrm{k}_r$ и вычисляется по формуле:

$$C_n\ k_1, k_2, ..., \mathrm{k}_r\ = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_r!}. \tag{2.7}$$

Пример 2.8. Девять человек размещаются в гостинице в четырехместный, трехместный и двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

$$C_9\ 4,\ 3,\ 2\ = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260.$$

3.ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

Аксиоматическое определение вероятности. Пусть задано пространство элементарных событий E и каждому событию $A \subset E$ поставлено в соответствие единственное число $P(A)$ такое, что:

1) $P(A) \geq 0$,

2) для каждой пары несовместных событий $A, B \subset E$ имеет место равенство: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

3) $P(E) = 1$.

Тогда говорят, что на событиях в множестве E задана вероятность, а число $P(A)$ называется ***вероятностью события*** A.

Классическое определение вероятности. Пусть пространство элементарных событий E состоит из N равновозможных элементарных событий, среди которых имеется n событий, благоприятствующих событию A, тогда число

$$P(A) = \frac{n_A}{N} \qquad (3.1)$$

называется ***вероятностью события*** A.

Пример 3.1. Пусть из урны, содержащей 7 белых и 13 черных шаров, вынимают наугад 3 шара. Каковы вероятности следующих событий:

A – все три шара белые;

B – все три шара черные;

C – два шара черные и один шар белый.

Решение. Для нахождения вероятностей каждого из событий будет использоваться формула (3.1). Причем очевидно, что знаменатель N будет одним и тем же для всех трех случаев. Найдем его. Величина N определяет число всех возможных способов выбора трех шаров из 20 (7+13). Цвет шаров при нахождении числа N не учитывается. Число таких возможных способов дает формула (2.4):

$$N = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{17!\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{17!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 1140.$$

Найдем n_A - число всех событий, благоприятствующих событию A. Так как событие A произойдет только тогда, когда все три шара нужно выбрать из совокупности белых шаров, т.е. из 7. применив формулу (2.4), получим

$$n_A = C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

По формуле (3.1) имеем $P(A) = \dfrac{35}{1140} \approx 0,3$.

Аналогично можно найти n_B, выбирая три шара из совокупности черных шаров, т.е. из 13:

$$n_B = C_{13}^{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{10!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 286.$$

По формуле (3.1) получаем $P(B) = \dfrac{286}{1140} \approx 0,25$.

Для наступления события C необходимо, чтобы два шара были черными, т.е. их надо выбрать из 13 черных шаров. Число способов такого выбора равно $C_{13}^{2} = \dfrac{13!}{2!11!} = \dfrac{11!\cdot 12\cdot 13}{11!\cdot 1\cdot 2} = 78$.

Однако для наступления события C требуется еще, чтобы один шар был белый, т.е. одни шар нужно выбрать из 7 числом способов, равным $C_{7}^{1} = \dfrac{7!}{1!6!} = \dfrac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1} = 7$.

Каждая комбинация двух черных шаров может сочетаться с каждым из белых шаров, поэтому общее число событий, благоприятствующих событию C, будет равно: $n_C = C_{13}^{2}\cdot C_{7}^{1} = 78\cdot 7 = 546$. Отсюда $P(C) = \dfrac{546}{1140} \approx 0{,}48$.

Пример 3.2. Лифт начинает движение с четырьмя пассажирами и останавливается на 10-м этаже. Какова вероятность, что никакие два пассажира не выйдут на одном этаже?

Решение. Пусть все возможные случаи выхода пассажиров равновероятны, тогда первый пассажир имеет 10 возможностей выхода на 10 этажах, второй – 9 на 9 оставшихся этажах, третий 8 на 8 оставшихся этажах, четвертый – 7. По правилу произведения, общее число исходов, благоприятствующих событию A (никакие два пассажира не выйдут на одном этаже), $n_A = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = A_{10}^{4}$. Общее число вариантов выхода четырех пассажиров на 10 этажах равно числу размещений с возвращениями из 10 элементов по 4, $\overline{A_{10}^{4}}$.

Отсюда $P(A) = \dfrac{n_A}{N} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{10^4} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{10^3} = \dfrac{504}{1000} = 0{,}504$.

Пример 3.3. На полке стоит n книг, какова вероятность, что k из них находятся рядом ($k<n$)?

Решение. В качестве элементарных событий условно можно рассматривать различные подмножества пространства элементарных событий, полагая, что они имеют соответствующие свойства (неразложимости, равновозможности).

I способ. Элементарные события – книги, которые могут стоять на n местах. В одном ряду на соседних местах k книг можно поставить $(n-k+1)$ способами. Причем, по правилу произведения, $n_A = (n-k+1)\cdot k!(n-k)!$, где $k!$ - количество перестановок из k книг, стоящих рядом, $(n-k)!$ - количество перестановок из $(n-k)$ оставшихся книг. Обще число постановок из n книг равно $n!$.

Имеем $P(A) = \dfrac{n_A}{N} = \dfrac{(n-k+1)k!(n-k)!}{n!} = \dfrac{k!(n-k+1)!}{n!}$.

II способ. Рассмотрим в качестве элементарных событий все размещения из n книг по k, получим

$$P(A)=\frac{(n-k+1)\cdot P_k}{A_n^k}=\frac{(n-k+1)\,k!}{\dfrac{n!}{(n-k)!}}=\frac{(n-k+1)\,k!}{n!},$$

где P_k - количество всех перестановок из k книг, стоящих рядом,

A_n^k - количество всех размещений из n по k.

III способ. Рассмотрим в качестве пространства элементарных событий множество всех сочетаний из n книг по k, имеем

$$P(A)=\frac{n-k+1}{C_n^k}=\frac{(n-k+1)(n-k)!\,k!}{n!}=\frac{(n-k+1)\,k!}{n!},$$

где C_n^k - количество всех сочетаний из n по k.

Основные свойства вероятности

Пусть задано пространство элементарных событий *E*, а вероятности *P* определены на событиях из *E*. Тогда:

1) $P(\varnothing)=0$, т.е. вероятность невозможного события равна нулю.

2) $P(A)+P(\bar{A})=1$.

3) $0\le P(A)\le 1$ для любого события *A*.

Статистическое определение вероятности

Пусть проводится серия опытов (n раз), в результате которых наступает или не наступает некоторое событие *A* (m раз), тогда отношение $\frac{m}{n}$, при $n\to\infty$, называется **статистической вероятностью события *A*.**

Таблица 3.1

Опыты по подбрасыванию монеты

Опыт	Число опытов, n	Появление герба, m	$\frac{m}{n}$
Опыт Керриха	10000	5087	0,5087
Опыт Бюффона	4040	2048	0,5069
1 Опыт Пирсона	12000	6019	0,5016
2 Опыт Пирсона	24000	12012	0,5005

Из таблицы 3.1, отражающей опыт подбрасывания монеты, следует, что $\frac{m}{n}\to 0{,}5$, где $\frac{m}{n}$ - относительная частота, или «частость» события *A*.

Иногда при рассмотрении бесконечных множеств удобно рассматривать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области.

Пример 3.4. Найти вероятность того, что точка, случайным образом брошенная в квадрат $ABCD$ со стороной 4, попадет в квадрат $A_1E_1C_1D_1$ со стороной 3, находящийся внутри $ABCD$ (рис. 3.1).

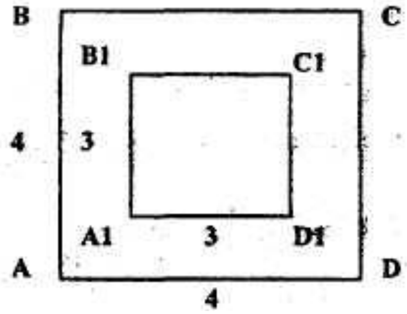

Рис. 3.1

Решение. Вероятность события определяется как отношение меры части области (в данном случае площади), благоприятствующей событию $A - S_{A_1B_1C_1D_1}$, к мере всей области - S_{ABCD}.

$$P\ \ A = \frac{S_{A_1B_1C_1Д_1}}{S_{ABCД}} = \frac{9}{16}.$$

Пример 3.5. Два лица A и B договорились встретиться в определенном месте в промежутке времени от 9^{00} до 10^{00}. Каждый из них приходит наудачу, независимо от другого, и ожидает 10 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

Решение. Рассмотрим прямоугольную систему координат XOY, в качестве единиц масштаба выберем часы. Пусть x и y - моменты прихода A и B соответственно. Необходимым и достаточным условием встречи является выполнение неравенства $|y - x| \le 1/6$ (или $x - 1/6 \le y \le x + 1/6$). Тогда все возможные исходы будут являться точками квадрата 1×1. Заштрихованной области квадрата, ограниченной сторонами квадрата, а также прямыми $y = x - 1/6$ и $y = x + 1/6$ соответствуют исходы, благоприятствующие встрече (рис. 3.1).

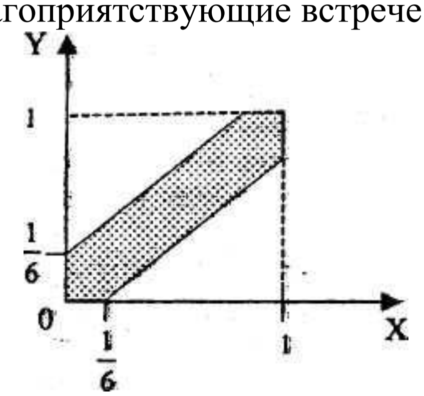

Рис. 3.2

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата.

$$P=\frac{1^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1^2}=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}.$$

4.ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A)+P(B). \qquad (4.1)$$

Пример 4.1. В ящике находятся 8 белых, 5 черных и 10 красных шаров. Случайным образом выбирается один шар. Какова вероятность того, что этот шар не белый?

Решение. Пусть событие A — выбор черного шара, B — выбор красного шара. Тогда событие $C = A + B$ определяет выбор не белого шара (либо черного, либо красного).

По классической формуле

$$P\ A=\frac{5}{23}; \qquad P\ B=\frac{10}{23}.$$

По теореме 1 окончательно получаем:

$$P\ C=P\ A+B=P\ A+P\ B=\frac{5}{23}+\frac{10}{23}=\frac{15}{23}.$$

Пример 4.2. На фирме имеется две вакантные должности, на которые претендуют трое мужчин, и пять женщин. Найти вероятность того, что среди взятых на работу людей будет хотя бы один мужчина, если отбор претендентов производится случайным образом.

Решение. Пусть событие C состоит в том, что среди взятых на работу людей будет хотя бы один мужчина. Очевидно, что событие C произойдет в том случае, когда произойдет одно из следующих двух несовместных событий: A — приняты на работу двое мужчин; B — приняты на работу одна женщина и один мужчина. Таким образом, $C = A + B$.

Найдем вероятности событий A и B, используя классическую формулу, получим:

$$P\ A=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}=\frac{3}{28} \quad \text{и} \quad P\ B=\frac{C_3^1\cdot C_5^1}{C_8^2}=\frac{3\cdot 5}{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}=\frac{15}{28}.$$

События A и B несовместны, следовательно, можно применить теорему 1. Получаем $P\ C=P\ A+B=P\ A+P\ B=\frac{3}{28}+\frac{15}{28}=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}.$

При решении примера 4.2 не было рассмотрено только одно из возможных событий, состоящее в том, что будут приняты на работу две женщины.

Обозначим это событие буквой *B* и найдем его вероятность. Применяя классическую формулу, получим:

$$P(D)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}}{\dfrac{8!}{2!\cdot 6!}}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}.$$

Нетрудно понять, что события *A*, *B* и *D* образуют полную группу для испытания: выбор двух человек из восьми. Найдем сумму вероятностей этих событий: $P(A)+P(B)+P(D)=\frac{3}{28}+\frac{15}{28}+\frac{10}{28}=1$. Полученный результат можно представить в общем виде.

Следствие 1. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ - попарно несовместные события, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n). \qquad (4.2)$$

Следствие 2. Вероятность суммы попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна 1:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1. \qquad (4.3)$$

Следствие 3. События *A* и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу событий, поэтому

$$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=1. \qquad (4.4)$$

Отсюда

$$P(\bar{A})=1-P(A). \qquad (4.5)$$

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (4.6)$$

Введем понятие зависимых и независимых событий.

Два события *A* и *B* называются ***независимыми***, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого (в противоположном случае события ***зависимы***).

Теорема 3. Вероятность произведения двух независимых событий *A* и *B* равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A)\cdot P(B). \qquad (4.7)$$

Следствие. Вероятность произведения *n* независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n). \qquad (4.8)$$

Условной вероятностью события *B*, при условии, что событие *A* уже произошло, называется число $P(AB)/P(A)$, которое обозначается

$$P(AB)/P(A)=P(A/B)=P_A(B). \qquad (4.9)$$

Аналогично, $P(AB)/P(B)=P(A/B)=P_B(A)$ - условная вероятность события *A*, при условии, что событие *B* уже произошло.

Теорема 4. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности наступления события A на условную вероятность события B при условии, что событие A уже произошло:

$$P(A\cdot B) = (A)\cdot P(B/A). \qquad (4.10)$$

Пример 4.3. В урне 4 шара, 2 белых и 2 черных. Из урны извлекают подряд два шара. Определить вероятность того, что первый шар окажется белым, а второй - черным. Вычисление вероятностей провести в двух предположениях: а) первый вынутый шар возвращается в урну, после чего шары в урне перемешиваются; б) первый вынутый шар в урну не возвращается.

Решение. Пусть A – появление белого шара в 1-й раз; B – появление черного шара во 2-й раз. Искомое событие AB. Тогда в случае а) события A и B независимые и

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

В случае б) события A и B зависимые, поэтому

$$P(AB) = P(A)\cdot P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Следствие. Если события A и B независимы, то из теоремы 4 следует терема 3.

Событие B не зависит от события A, если $P(B/A) = P(B)$.

Теорему 4 можно обобщить на n событий.

Теорема 5. Вероятность произведения n зависимых событий - $A_1, A_2, ..., A_n$ равна произведению последовательных условных вероятностей:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_{n-1}\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot ...\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_{n-1}). \qquad (4.11)$$

Теорема 6. Вероятность наступления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна разности между единицей и вероятностью произведения отрицаний событий $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot ...\cdot\bar{A}_n) =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)\cdot ...\cdot P(\bar{A}_n/\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot ...\cdot\bar{A}_{n-1}) \qquad (4.12)$$

Следствие 1. Вероятность наступления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$ - независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot ...\cdot P(\bar{A}_n). \qquad (4.13)$$

Следствие 2. Если события имеют одинаковую вероятность появиться $P(A_i) = p,\ P(\bar{A}_i) = 1 - p = q,$ где $i = (1,\ 2,\ ...,\ n)$, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (4.14)$$

Пример 4.4. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в 1-м, 2-м и 3-м справочниках, соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике (событие A);

б) только в двух справочниках (событие B);

в) во всех трех справочниках (событие C);

г) хотя бы в одном справочнике (событие D);

д) ни в одном справочнике (событие E).

Решение. Рассмотрим элементарные события и их вероятности:

A_1 - формула находится в 1-м справочнике, $P(A_1) = 0{,}6$,

$$P\left(\overline{A_1}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$

A_2-формула находится во 2-м справочнике, $P(A_2)=0{,}7$,

$$P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$

A_3-формула находится в 3-м справочнике, $P(A_3)=0{,}8$,

$$P\left(\overline{A_3}\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Выразим через элементарные события и их отрицания все события A-E, применим теоремы данного параграфа.

а) $A = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$,

$$P(A) = P\left(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3\right) =$$

$$= P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}188;$$

б) $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$,

далее аналогично пункту а) подучим, что $P(B) = 0{,}452$;

в) $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Исходя из теоремы 3, получим:

$$P(C) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336;$$

г) $D = A_1 + A_2 + A_3$, вероятность события D можно найти, обобщив теорему 2 для трех событий:

$$P(D) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) -$$

$- P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$. Но проще воспользоваться следствием к теореме 6:

$$P(D) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}976;$$

д) $E = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, $P(E) = 0{,}024$.

5.ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ВЕРОЯТНОСТИ ГИПОТЕЗ

Пусть событие *A* может наступать только одновременно с одним из попарно несовместных событий: $H_1,\ H_2,\ ...,\ H_n$, образующих полную группу. Тогда вероятность события *A* определяется по ***формуле полной вероятности***:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n), \qquad (5.1)$$

или

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i),$$

где события $H_1,\ H_2,\ ...,\ H_n$ - гипотезы, а $P(A/H_i)$ - условная вероятность наступления события *A* при наступлении *i*-й гипотезы (*i*=1, 2, …, *n*).

Условная вероятность гипотезы H_i, при условии того, что событие *A* произошло, определяется по формуле вероятности гипотез или ***формуле Байеса*** (она позволяет пересмотреть вероятность гипотез после наступления события *A*):

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}. \qquad (5.2)$$

Пример 5.1. Команда стрелков состоит из 5 человек, 3 из них попадают с вероятностью 0,8, а двое с вероятностью 0,6. Наудачу из команды берется стрелок и производит выстрел.

а) Какова вероятность того, что стрелок попадет?

б) Если стрелок попал в цель, то какова вероятность, что это один из трех (один из двух)?

Решение. а) Событие *A* может произойти, если произойдет одно из несовместных событий: H_1 - наудачу взятый стрелок один из трех, H_2 - наудачу взятый стрелок один из двух. Для определения вероятности события *A* воспользуемся формулой (5.1).

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{10}=\frac{18}{25},$$

т.к. $P(H_1)=\frac{3}{5}$, $P(A/H_1)=\frac{8}{10}$; $P(H_2)=\frac{2}{5}$, $P(A/H_2)=\frac{6}{10}$.

б) По формуле (5.2)

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{24}{50}}{\frac{36}{50}}=\frac{2}{3},$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{12}{50}}{\frac{36}{50}}=\frac{1}{3}$$

или $P\left(H_2/A\right)=1-P\left(H_1/A\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Пример 5.2. По предмету теория вероятностей и математическая статистика имеется 30 экзаменационных билетов. Студент Павлов выучил только 20. Каким выгоднее ему зайти на экзамен - первым или вторым?

Решение. Событие A - студент Павлов заходит первым,

$$P\left(A\right)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

Событие B — студент Павлов заходит вторым – может произойти только с одним из попарно несовместных событий A_1, A_2, где событие A_1 — 1-й студент вытащит 1 из 20 билетов, которые Павлов знает; событие A_2— 1-й студент вытащит 1 из 10 остальных билетов.

$$B=A_1B+A_2B,$$

$$P\left(B\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(B/A_1\right)+P\left(A_2\right)\cdot P\left(B/A_2\right)=\frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}+\frac{10}{30}\cdot\frac{20}{29}=\frac{2}{3}.$$

То есть все равно, зайдет студент первым или вторым.

6. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

Пусть некоторый опыт повторяется в неизменных условиях n раз, причём каждый раз может либо наступить (успех), либо не наступить (неудача) некоторое событие A, где $P(A)=p$ — вероятность успеха, $P\left(\overline{A}\right)=1-p=q$ — вероятность неудачи. Тогда вероятность того, что в k случаях из n произойдёт событие A, вычисляется по ***формуле Бернулли:***

$$P_n\left(k\right)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}. \tag{6.1}$$

Часто применяемые формулы в схеме Бернулли.

Вероятность наступления события A:

а) менее k раз:

$P_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+\ldots+P_n\left(k-1\right)$;

б) более k раз:

$P_n\left(k+1\right)+P_n\left(k+2\right)+\ldots+P_n\left(n\right)$;

в) не менее k раз:

$P_n\left(k\right)+P_n\left(k+1\right)+\ldots+P_n\left(n\right)$;

г) не более k раз:

$P_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+\ldots+P_n\left(k\right)$;

д) хотя бы один раз:

$1-P_n\left(0\right)$.

Пример 6.1. Монета подбрасывается 6 раз в неизменных условиях. Успехом считается герб (событие A); найти вероятность того, что герб появится 4 раза.

Решение. Условия проведения опыта соответствуют схеме Бернулли. $P(A)=p=\dfrac{1}{2}$, $q=1-p=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Согласно условию n=6, k=4. По формуле Бернулли имеем

$$P_6(4)=C_6^4\cdot p^4\cdot q^{6-4}=\frac{6!}{(6-4)!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=$$

$$=\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}.$$

Пример 6.2. Некоторый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, он собирается произвести 10 выстрелов. Найти вероятность того, что он попадет в цель: а) три раза, б) хотя бы один раз.

Решение. $p=0,6$, $q=1-p=1-0,6=0,4$ $n=10$.

а) $P_{10}(3)=C_{10}^3\cdot p^3\cdot q^{10-3}=\dfrac{10!}{(10-3)!3!}\cdot 0,6^3\cdot 0,4^7=\dfrac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 3!}\cdot 0,6^3\cdot 0,4^7\approx 0,255$;

б) $P_{10}(k\geq 1)=1-P_{10}(0)=1-C_{10}^0 p^{0}q^{10-0}=1-0,4^{10}$.

Наивероятнейшее число наступивших событий в схеме Бернулли - k_0 $(k_0\in N)$, определяется из следующего неравенства:

$$np-q\leq k_0\leq np+p. \tag{6.2}$$

В примере 6.1:

$$6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\leq k_0\leq 6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$2,5\leq k_0\leq 3,5,$$
$$k_0=3.$$

В примере 6.2:

$$10\cdot 0,6-0,4\leq k_0\leq 10\cdot 0,6+0,6,$$
$$5,6\leq k_0\leq 6,6,$$
$$k_0=6.$$

6.1. Приближенные формулы в схеме Бернулли

При большом числе опытов по схеме Бернулли удобнее пользоваться приближенными формулами.

1. *Локальная формула Муавра-Лапласа.*

Если $npq\geq 10$, то

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{6.3}$$

где вероятность p отлична от 0 и 1 $(p\to 0.5)$, $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Для облегчения вычислений функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{6.4}$$

представлена в виде таблицы (прил. 1).

$\varphi(x)$ - функция вероятности нормального распределения (рис. 6.1) имеет следующие свойства:

1) $\varphi(x)$ - четная;

2) точки перегиба $x=\pm1$;

3) при $x\geq4$, $\varphi(x)\to0$, поэтому функция $\varphi(x)$ представлена в виде таблицы (затабулирована 0 для $0\leq x\leq4$ (прил. 1).

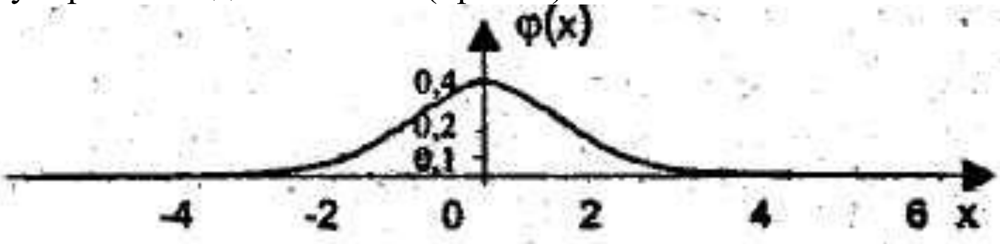

Рис. 6.1. Функция вероятности нормального распределения

2. *Формула Пассона.*

Если $npq\geq10$ и $p<0,1$, то:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \tag{6.5}$$

где $\lambda=np$.

Пример 6.3. Стрелок выполнил 400 выстрелов. Найти вероятность 325 попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

Решение. $npq=400\cdot0,8\cdot0,2=64\geq10$, следовательно, по формуле (6.3):

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},$$

$$P_{400}(325)\approx\frac{1}{\sqrt{64}}\varphi(0,63)\approx\frac{1}{8}\cdot0,3271\approx0,041.$$

Пример 6.4. Завод оправил 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути разбили одно изделие, 0,0002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено:

а) 3 изделия;

б) 1 изделие;

в) не более трех изделий.

Решение. $npq=5000\cdot0,0002\cdot0,9998=0,9998<10$ и $p<0,1$, поэтому применяем формулу Пуассона (6.5.), где $\lambda=\nu\pi=5000\cdot0,0002=1$.

а) при $k=3$: $P_{5000}(3)\approx\frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1}=\frac{1}{6e}\approx0,061=\frac{1}{6e}$,

б) при $k=1$: $P_{5000}(1)\approx\frac{1^1}{1!}\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}\approx\frac{1}{2,71828}\approx0,368$.

в) $P_{5000}(0 \le x \le 3) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) + P_{5000}(3) =$

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{6e} = \frac{16}{6e} = \frac{8}{3e} \approx 0,981.$$

3. При больших значениях n, для вычисления вероятности того, что произойдет от k_1 до k_2 событий по схеме Бернулли, используется *интегральная формула Муавра-Лапласса:*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \qquad (6.6)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)$ - функция Лапласа (рис. 6.2).

$\Phi(x)$ имеет следующие свойства:

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ - функция нечетная, поэтому достаточно применять её для неотрицательных значений x:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \qquad (6.7)$$

2) функция $\Phi(x)$ возрастает на всей числовой прямой;

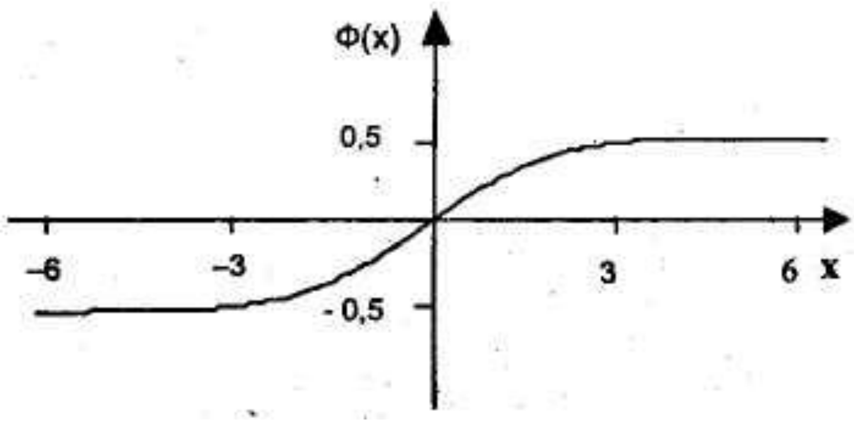

Рис. 6.2. Функция Лапласа

3) при $x \ge 4$, $\Phi(x) \to \dfrac{1}{2}$ ($y = 0,5$ - горизонтальная асимптота при $x > 0$), поэтому функция представлена в виде таблицы для $0 \le x \le 4$ (прил. 2);

4) вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях не более чем на некоторое число $\varepsilon > 0$:

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (6.8)$$

Пример 6.5. Стрелок выполнил 400 выстрелов, вероятность одного попадания 0,8. Найти вероятность того, что он попадет от 310 до 325 раз.

Решение. $P_{400}(310 \le k \le 325) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{325 - 320}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8} = 0,63,\ x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{310 - 320}{\sqrt{64}} = \frac{-10}{8} = -1,25.$$

$$P_{400}(310 \le k \le 325) \approx \Phi(0,63) - \Phi(-1,25) = \Phi(0,63) + \Phi(1,25) =$$
$$= 0,2357 + 0,3944 = 0,6301.$$

Пример 6.6. В каждом из 10 000 независимых испытаний вероятность успеха p=0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от постоянной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Решение. $n = 10000$, $p = 0,75$, $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$, $\varepsilon = 0,001$, следовательно

$$P_{10000}\left(\left|\frac{m}{n} - 0,75\right| < 0,001\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(0,001 \cdot \sqrt{\frac{10000}{0,75 \cdot 0,25}}\right) = 2\Phi\left(0,23\right) = 0,182.$$

Вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности в независимых испытаниях не превысит 0,001, равна 0,182.

Пример 6.7. Вероятность появления события в каждом независимом испытании p=0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности может произойти с вероятностью 0,9128 при 5 тысячах повторений независимых испытаний по схеме Бернулли.

Решение. $P_{5000}\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 0,9128$, или $2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,9128$, отсюда:

$$\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{5000}{0,2 \cdot 0,8}}\right) = 0,4564,\ \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{5000}{0,16}} = 1,71,\ \varepsilon = \frac{1,71}{\sqrt{5000 \div 0,16}} \approx 0,00967.$$

Пример 6.8. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления герба от вероятности p=0,5 окажется по абсолютной величине не больше 0,01?

Решение. По условию $2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,6$. Отсюда:

$$\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,3,\ \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,84,\ \sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,84/\varepsilon,$$

$$n = \left(\frac{0,84}{\varepsilon}\right)^2 pq = \left(\frac{0,84}{0,01}\right)^2 \cdot 0,5 \cdot \left(1 - 0,5\right) = 84^2 \cdot 0,25 = \left(84 \cdot 0,5\right)^2 = 42^2 = 1764.$$

7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Переменная величина называется *случайной*, если в результате опыта она может принимать действительные значения с определёнными вероятностями.

Дискретная случайная величина (ДСВ) может принимать конечное или бесконечное счетное числа значений. Например, подбрасываем монету 5 раз. Случайная величина X- число появлений герба 0, 1, 2,3,4,5.

Непрерывная случайная величина (НСВ) в отличие от ДСВ принимает бесконечное несчетное число значений. Например, мишень имеет форму круга радиуса R. По этой мишени произвели выстрел с обязательным попаданием. Обозначим через Y расстояние от центра до точки попадания в мишень, $Y \in [0; R]$. Y— непрерывная случайная величина, так как она принимает бесконечное несчетное число значений.

8. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть X - дискретная случайная величина, которая принимает значения: $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...$ с некоторой вероятностью p_i, где i = 1, 2, ..., n,... Тогда можно говорить о вероятности того, что случайная величина X приняла значение x_i: $p_i = P(X = x_i)$.

Значения x_i и соответствующие p_i представляют в виде таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n	$\dots$

Эта таблица является одной из форм задания ДСВ. Обычно случайные величины располагаются в возрастающем порядке. Основное свойство таблицы заключено в том, что сумма вероятностей равна 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n + ... = 1. \tag{8.1}$$

Пример 8.1. Монета бросается 5 раз. Представим закон распределения ДСВ X- числа появлений герба, в виде таблицы.

ДСВ X может принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вероятность появления герба в одном опыте $p = \dfrac{1}{2}$, непоявления $q = \dfrac{1}{2}$, $n = 5$. Таким образом, выполняются условия применения формулы Бернулли. Имеем:

$$P_5(X = 0) = C_5^0 p^0 q^{5-0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32},$$

$$P_5(X = 1) = C_5^1 p^1 q^{5-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(X = 2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{10}{32},$$

$$P_5(X = 3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{10}{32},$$

$$P_5(X = 4) = C_5^4 p^4 q^{5-4} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(X = 5) = C_5^5 p^5 q^{5-5} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{1}{32}.$$

Полученные данные представим в виде таблицы распределения:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Дискретная случайная величина может быть представлена также в виде многоугольника распределения – фигуры, состоящей из точек $x_i,\ p_i$, соединенных отрезками (рис. 8.1).

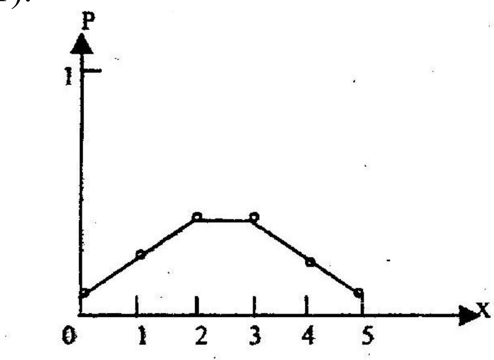

Рис. 8.1. Многоугольник распределения

9. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. ***Закон распределения Бернулли.*** Случайная величина *X*, распределенная по закону Бернулли (индикаторная случайная величина), принимает значения 1 – успех или 0 – неудача, с вероятностями *p* и *q* соответственно $p+q=1$.

X	0	1
P	*q*	*p*

2. ***Биноминальный закон распределения***. Случайная величина *X* принимает значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, *n*, с вероятностью, определяемой по формуле Бернулли (6.1):

X	0	1	2	…	*k*	…	*N*
P	$C_n^0\cdot p^0\cdot q^n$	$C_n^1\cdot p^1\cdot q^{n-1}$	$C_n^2\cdot p^2\cdot q^{n-2}$	…	$C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$	…	$C_n^n\cdot p^n\cdot q^0$

3. ***Закон распределения Пуассона.*** Случайная величина *X* принимает бесконечное счетное число значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, *k, ...,* с вероятностью, определяющейся по формуле Пуассона:

$$P\ \ X=k\ \ =\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \tag{9.1}$$

где $\lambda>0$ - параметр распределения Пуассона.

X	0	1	2	…	*k*	…
P	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}\cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$	…

При $n \to \infty$ и $p \to 0$ биноминальный закон приближается к закону распределения Пуассона, где $\lambda = np$.

4. ***Геометрический закон распределения***. Пусть $P(A) = p$ - вероятность наступления события *A* в каждом опыте, соответственно, $q = 1 - p$ - вероятность ненаступления события *A* (схема Бернулли).

Вероятность появления *m*-неудач до первого наступления события *A* определяется по формуле:

$$P(X = m) = p \cdot q^m. \qquad (9.2)$$

X	0	1	2	…	m	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^m	…

5. ***Геометрический закон распределения***, сдвинутый на единицу.

Вероятность наступления события *A* в *m*-м опыте определяется по формуле:

$$P(X = m) = p \cdot q^{m-1}. \qquad (9.3)$$

Случайная величина *X*, распределенная по геометрическому закону, сдвинутому на 1 (геометрический закон +1), означает число опытов до первого появления события *A* и принимает замечания: 1, 2, …, *m*, …, с вероятностью, определяемой по формуле (9.3):

X	1	2	3	…	m	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{m-1}	…

Пример 9.1. Из орудия производили выстрел по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при втором, третьем, *m*-м выстреле.

Решение.

$P(X = 1) = p = 0,6$;

$P(X = 2) = pq = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$;

$P(X = 3) = pq^2 = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,096$.

…………………………………………

$P(X = m) = p \cdot q^{m-1}$.

X	1	2	3	…	m	…
P	0,6	0,24	0,096	…	pq^{m-1}	…

Сумма вероятностей, как и для других законов, равна единице:

$S = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{0,6}{1-0,4} = \dfrac{0,6}{0,6} = 1$ - согласно формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии, со знаменателем *q* меньше единицы.

6. ***Гипергеометрический закон распределения***. Пусть в урне *N* шаров, из них *M* белых, а остальные (*N*-*M*) черные. Найдем вероятность того, что из извлеченных *m* шаров *n* белых и (*n*-*m*) черных.

$N_{\text{шаров}} = M_{\text{белых}} + \ N - M \ _{\text{черных}}$;

$n_{\text{шаров}} = m_{\text{белых}} + \ n - m \ _{\text{черных}}$;

C_M^m - число способов выбора m белых шаров из M;

C_{N-M}^{n-m} - число способов выбора (n-m) черных шаров из (N-M).

Всего возможных выборов наборов из m-белых и (n-m) черных, по правилу произведения, равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$; C_N^n - общее число способов выбора из N шаров n.

Отсюда по формуле классического определения вероятности:

$$P \ A \ = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{9.4}$$

Ограничения на параметры: $M \le N$, $m \le m$, $m = m_0$, $m_0 + 1$, $m_0 + 2$, …, $\min \ M, n \$, где $m_0 = \max \ O, n - \ N - M \$. Случайная величина X=m, распределенная по гипергеометрическому закону распределения (при m=0, 1, 2, 3, …, M), имеет вид:

X	0	1	2	…	m	…	M
P	$\frac{C_M^0 C^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^2 C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^M C_{N-M}^{n-M}}{C_N^n}$

Гипергеометрический закон определяется тремя параметрами N, M, n.

Пример 9.2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Найдем вероятности возможных значений X по формуле (9.4), где N – число деталей в партии, M – число стандартных деталей в партии, n – число отобранных деталей, m – число стандартных деталей среди отобранных, N=6, M=4, n=3.

$P \ X = 0 \ = 0$;

$P \ X = 1 \ = \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$;

$P \ X = 2 \ = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$;

$P \ X = 3 \ = \frac{C_4^3 \cdot C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$.

X	0	1	2	3
P	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 1\right).$$

10. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ СВОЙСТВА

Пусть x—действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т. е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Разумеется, если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и $F(x)$, т. е. $F(x)$—функция от x.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$\boldsymbol{F(x) = P(X<x).}$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Свойства функции распределения:

1. Значения распределения функции лежат между нулем и единицей, т.е.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функция $F(x)$ является неубывающей функцией, т.е. для любых $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[a, b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах рассматриваемого полуинтервала, т.е.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{10.1}$$

4. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то выполнены соотношения $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Из данного свойства вытекает следующее утверждение.

Утверждение. Для функции распределения непрерывной случайной величины справедливы следующие предельные соотношения:

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \qquad F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет какое-нибудь одно конкретное значение, равна нулю, т.е. для непрерывной случайной величины X выполнено $P(X = a) = 0$.

Формула (10.1) для непрерывной случайной величины может быть записана в следующем виде:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{10.2}$$

11. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть дискретная случайная величина имеет закон распределения, записанный в виде ряда распределения:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Функция распределения данной случайной величины может быть вычислена по формуле

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k) = \sum_{x_k < x} p_k, \qquad (11.1)$$

где неравенство $x_k < x$ под знаком суммы означает, что суммирование ведется по всем x_k, величина которых меньше *x*.

Из формулы (11.1) видно, что функция $F(x)$ представляет собой ступенчатую неубывающую функцию, растущую только в точках x_k скачками, равными по величине p_k; $k = 1,\ 2,\ \dots, n$; график функции распределения будет иметь вид, представленный на рисунке 11.1.

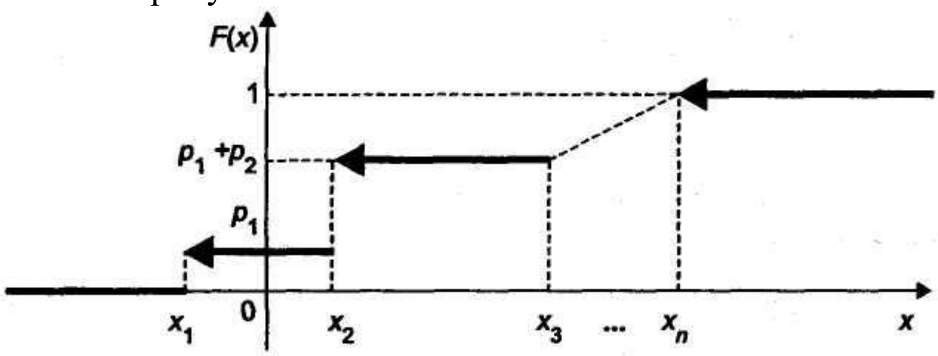

Рис. 11.1

Пример 11.1. Построить функцию распределения случайной величины *X*, заданной следующим законом:

X	1	2	3	4	5
P	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

и найти следующую вероятность $P(2 \le X < 4{,}5)$.

Решение. Если:

$x \le 1$, то $F(x) = 0$;

$1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X = 1) = 0{,}2$;

$2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$;

$3 < x \le 4$, то $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}7$;

$4 < x \le 5$, то $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$
$= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}9$;

$x>5$, то $F(x)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$=0,2+0,3+0,2+0,2+0,1=1$.

Построим график, представленный на рис. (11.2).

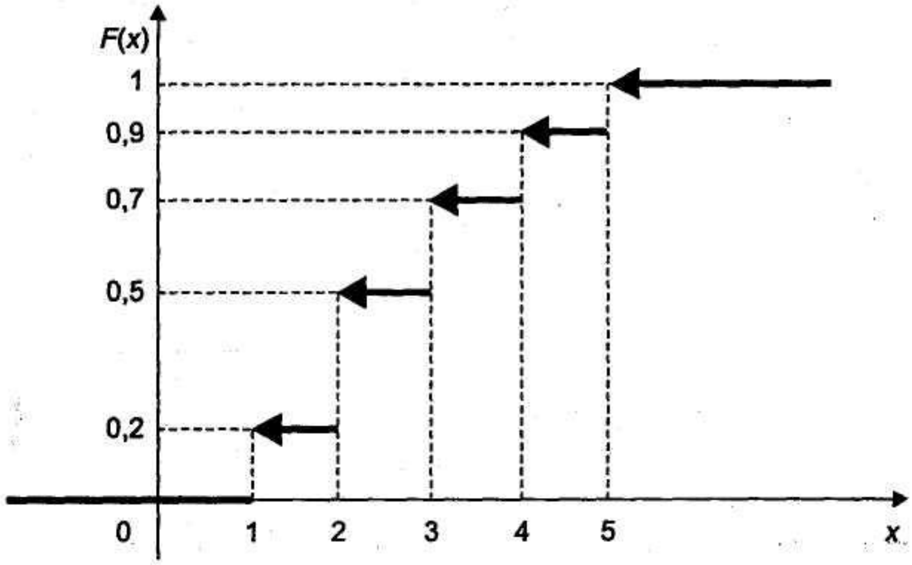

Рис. 11.2

Найдем $P(2\le X<4,5)$; используя формулу (10.1), получим

$P(2\le X<4,5)=F(4,5)-F(2)=0,9-0,2=0,7$.

12. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим график функции распределения дискретной случайной величины (см. рис. 11.1). Будем увеличивать число значений этой величины, тогда, очевидно, число ступенек будет также увеличиваться, а их длина — уменьшаться, и также будет уменьшаться расстояние между ступеньками. При неограниченном увеличении числа значений ступенчатая фигура будет приближаться к некой плавной непрерывной линии (рис. 12.1). В пределе в идеальном варианте такого положения появляется функция $F(x)$, которая является непрерывной.

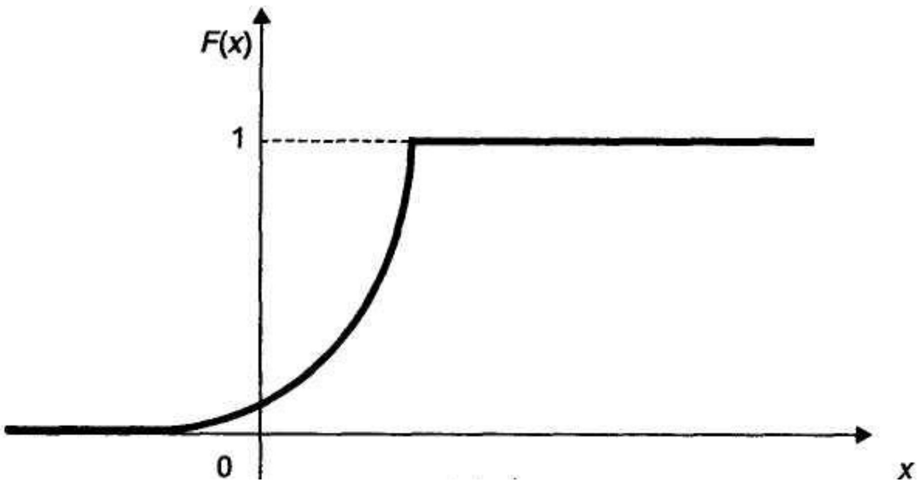

Рис. 12.1

Теперь можно уточнить определение непрерывной случайной величины. Случайная величина называется *непрерывной,* если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек, где она терпит излом.

Пример 12.1 Случайная величина X задана функцией распределения (см. рис. 12.1)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3} & \text{при} \quad -1<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Требуется построить график этой функции и найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, попадающее в интервал (0, 1).

Решение. Отметим на оси абсцисс точки x=-1 и x=2. Вся вещественная ось разобьется на три промежутка, для каждого из которых функция распределения имеет свой вид. Общий график функции представлен рис. 12.2.

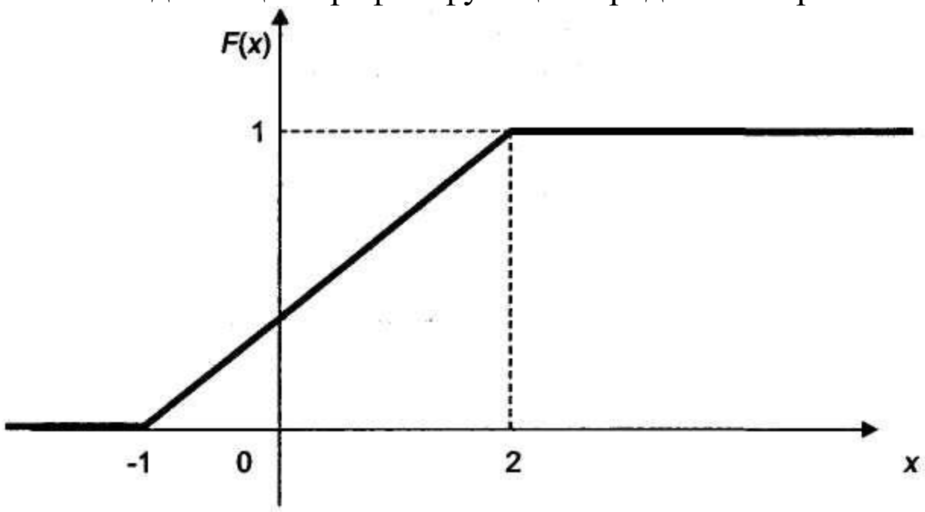

Рис. 12.2

Найдем $P(0<X<1)$. Применив формулу (10.2), получим:

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\left(\frac{0}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Функция распределения является законом распределения для любой случайной величины. Однако, так же как для дискретной величины, существует своя форма закона распределения — ряд распределения, так и для непрерывной случайной величины существует своя особая форма закона распределения - функция плотности.

13. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ СВОЙСТВА

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется первая производная от функции распределения, т.е.

$$f(x) = F'(x). \qquad (13.1)$$

Из формулы (13.1) следует, что функция распределения, в свою очередь, является первообразной от функции плотности. Именно поэтому функцию плотности иногда называют ***дифференциальной функцией распределения,*** а функцию распределения, как было отмечено ранее, — ***интегральной***.

Теорема 13.1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (13.2)$$

Формула (13.2) имеет простой геометрический смысл: вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 13.1).

Пример 13.1. По заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

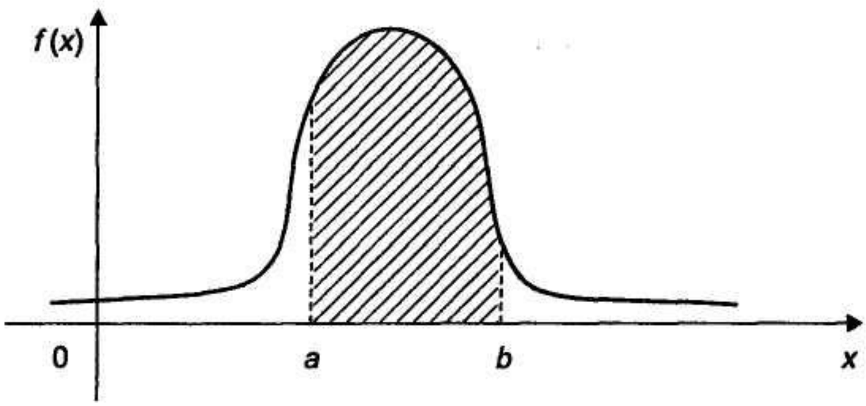

Рис. 13.1

найти функцию плотности распределения, построить графики обеих функций и найти вероятность того, что значение случайной величины X попадет в интервал (0,5; 0,75).

Решение. Найдем функцию плотности, используя формулу (13.1):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Построим график обеих функций (рис. 13.2).

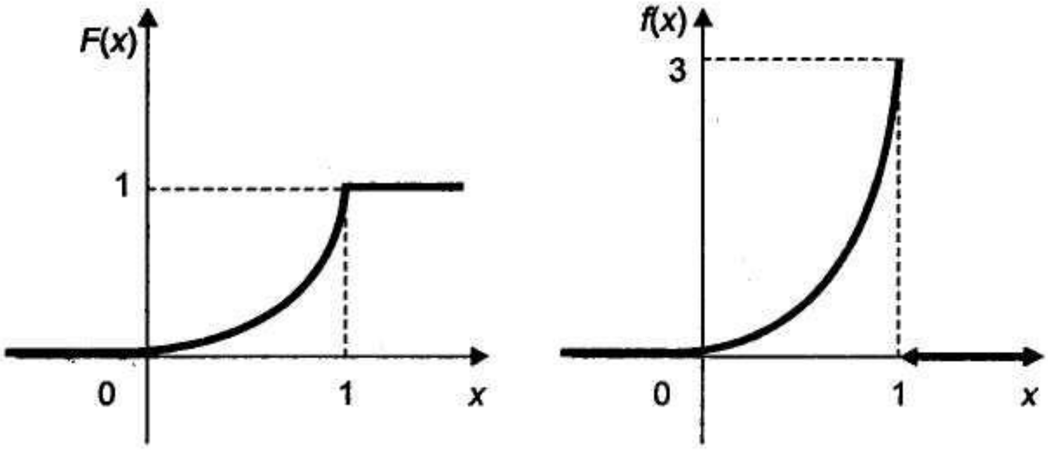

Рис. 13.2

Найдем требуемую вероятность , используя формулу (13.2):

$$P\left(0{,}5<X<0{,}75\right)=\int\limits_{0{,}5}^{0{,}75}3x^2dx=3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0{,}5}^{0{,}75}=\left(0{,}75\right)^3-\left(0{,}5\right)^3=0{,}297.$$

Очевидно, что эта же вероятность могла бы быть найдена и с помощью функции распределения, а именно, положив $a=-\infty$, а $b=x$, получим:

$$F\left(x\right)=P\left(-\infty<X<x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}f\left(t\right)dt. \qquad (13.3)$$

Пример 13.2. По заданной функции плотности найти функцию распределения

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{\left(x-3\right)^2}{9} & \text{при} \quad 0\le x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Решение. Воспользуясь формулой (13.3), получим: если $x<0$, то $f\left(x\right)=0$ и, следовательно, для этих *x*

$$F\left(x\right)=P\left(-\infty<X<x\right)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dt+\int\limits_{0}^{x}\frac{\left(t-3\right)^2}{9}dt=\left.\frac{\left(t-3\right)^3}{27}\right|_{0}^{x}=\frac{\left(x-3\right)^3}{27}+1;$$

если $x>3$, то $f\left(x\right)=0$ и, следовательно, для этих *x*

$$F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dt+\int\limits_{0}^{3}\frac{\left(t-3\right)^2}{9}dt+\int\limits_{3}^{x}0dt=\left.\frac{\left(t-3\right)^3}{27}\right|_{0}^{3}=\frac{\left(3-3\right)^3}{27}-\left(-1\right)=1.$$

Таким образом, функция $F\left(x\right)$ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \dfrac{(x-3)^3}{27}+1 & \text{при} \quad 0\le x\le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$$

Рассмотрим свойства функции плотности.

1. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины является неотрицательной функцией, т.е. $f(x)\ge 0$.

2. Несобственный интеграл от плотности по всей вещественной прямой равен 1, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

14. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей конечное число значений x_i с вероятностями p_i, называется сумма:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n.$$

Свойства математического ожидания:

1) $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$, $c \in R$,
2) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$, $X, Y \in E$,
3) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ для независимых случайных величин X и Y.

Математическое ожидание приближенно равно среднему значению случайной величины.

Дисперсией случайной величины X называется число:
$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\} = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Свойства дисперсии:

1) $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$, $c \in R$,
2) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ для независимых случайных величин X и Y.

Дисперсия характеризует квадрат разброса значений случайной величины.

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 14.1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

$$M\left(X^2\right)=4\cdot 0,1+9\cdot 0,6+25\cdot 0,3=13,3.$$

Искомая дисперсия

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=13,3-(3,5)^2=1,05.$$

Пример 14.2. Дискретная случайная величина *X* имеет только два возможных значения x_1 и x_2 $(x_1>x_2)$. Вероятность того, что *X* примет значение x_1, равна 0,6. Найти закон распределения величины *X*, если $M(X)=1,4$, $D(X)=0,24$.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что *X* примет значение x_2, равна 1-0,6=0,4. Напишем закон распределения *X*:

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 нужно составить два уравнения, связывающие эти числа. Выразим математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2: $M(X)=0,6x_1+0,4x_2$.

По условию $M(X)=1,4$, значит, $0,6x_1+0,4x_2=1,4$.

Найдем закон распределения X^2:

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,6	0,4

Найдем $M\left(X^2\right)$: $M\left(X^2\right)=0,6x_1^2+0,4x_2^2$.

Найдем $D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=0,6x_1^2+0,4x_2^2-(1,4)^2$.

По условию $D(X)=0,24$, значит $0,6x_1^2+0,4x_2^2-(1,4)^2=0,24$.

$0,6x_1^2+0,4x_2^2=2,2$.

Составим систему уравнений для нахождения x_1 и x_2:

$$\begin{cases}0,6x_1+0,4x_2=1,4,\\ 0,6x_1^2+0,4x_2^2=2,2.\end{cases}$$

Решив систему, найдем два решения $x_1=1$, $x_2=2$ и $x_1=1,8$, $x_2=0,3$. По условию $x_2>x_1$, значит, задаче удовлетворяет лишь первое решение: $x_1=1$, $x_2=2$.

Искомый закон распределения имеет вид:

X	1	2
P	0,6	0,4

Случайная величина X называется *дискретной*, если существует такая неотрицательная функция

$$P(X = x_i) = p_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

которая ставит в соответствие значению x_i переменной X вероятность p_i, с которой она принимает это значение. Дискретные случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события X=x_i и Y=y_j при произвольных I и j являются независимыми.

Случайная величина X называется *непрерывной*, если для любых $a<b$ существует такая неотрицательная функция $f(x)$, что

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения* непрерывной случайной величины.

Вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x, называется *функцией распределения* случайной величины X и обозначается $F(x)$:

$$F(x) = P(X \le x).$$

Общие свойства функции распределения:

1) $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. при $x_2 > x_1$, $F(x_2) \ge F(x_1)$.

2) $F(x)$ - ограниченная функция: $0 \le F(x) \le 1$,

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

15. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, \tag{15.1}$$

где $f(x)$ - плотность распределения случайной величины X.

Если возможные значения принадлежат интервалу $(a,\ b)$, то

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx. \tag{15.2}$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[X - M(X)\right]^2 f(x)\,dx, \quad \text{или} \tag{15.3}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(x)\,dx - \left[M(X)\right]^2. \qquad (15.4)$$

Если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$D(X) = \int_a^b \left[x - M(X)\right]^2 f(x)\,dx, \quad \text{или} \qquad (15.5)$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \left[M(X)\right]^2. \qquad (15.6)$$

Среднее квадратическое отклонение находится так же, как и для дискретных случайных величин:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (15.7)$$

Пример 15.1. Найти дисперсию непрерывной случайной величины, заданной своей функцией плотности $f(x) = 0,5x$ при $x \in (0, 2)$; для остальных x функция плотности равна нулю.

Решение. По формуле (15.2) найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot 0,5x dx = 0,5\int_0^2 x^2 dx = 0,5 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 0,5 \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

По формуле (15.5) найдем дисперсию, при этом несобственный интеграл превратится в определенный по заданному промежутку (0, 2):

$$D(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 0,5x dx = 0,5\int_0^2 \left(x^3 - 2x^2\frac{4}{3} + \frac{16}{9}x\right)dx =$$

$$= \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{16}{9}\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2 = 0,5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{8}{3}\frac{2^3}{3} + \frac{16}{9}\frac{2^2}{2}\right) = 0,5 \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

Пример 15.2. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{125} & \textit{при} \quad 0 < x \le 5, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 5. \end{cases}$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (2, 3); б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; в) функции распределения изобразить графически.

Решение. По четвертому свойству интегральной функции:

$$P(2 \le X < 3) = F(3) - F(2) = \left.\frac{x^3}{125}\right|_{x=3} - \left.\frac{x^3}{125}\right|_{x=2} = \frac{27}{125} - \frac{8}{125} = \frac{19}{125} = 0,152.$$

Найдем функцию плотности вероятности (дифференциальную функцию) (13.1)

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \dfrac{3x^2}{125} & \text{при} \quad 0<x\le 5, \\ 1 & \text{при} \quad x>5. \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал (2, 3) также можно найти, зная функцию плотности вероятности (13.2):

$$P(2\le X<3)=\int_2^3\frac{3x^2}{125}dx=\frac{3}{125}\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=\frac{27}{125}-\frac{8}{125}=\frac{19}{125}=0{,}152.$$

Найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины X. Следует обратить внимание, что случайная величина задана на интервале (0, 5).

$$M(X)=\int_0^5 x\cdot\frac{3}{125}x^2dx=\frac{3}{125}\int_0^5 x^3dx=\frac{3}{125}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^5=\frac{3}{5^3}\cdot\frac{5^4}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}=3{,}75.$$

$$Д(X)=\int_0^5 x^2\cdot\frac{3x^2}{125}dx-3{,}75^2=\frac{3}{125}\int_0^5 x^4dx-14{,}0625=$$

$$=\frac{3}{125}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^5-14{,}0625=15-14{,}0625=0{,}9375.$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}9375}=0{,}9682$. Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

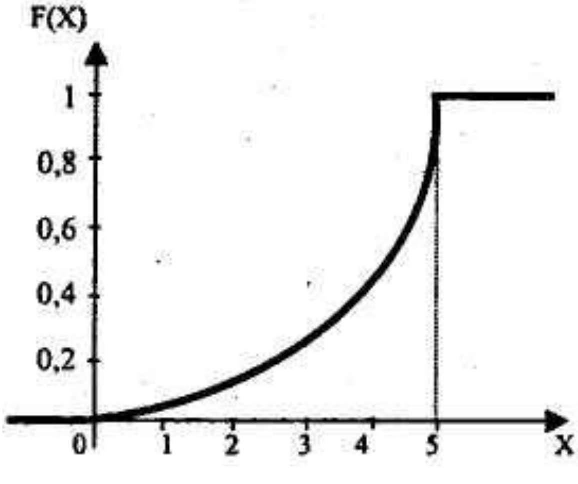

Рис. 15.1. Интегральная функция случайной величины X

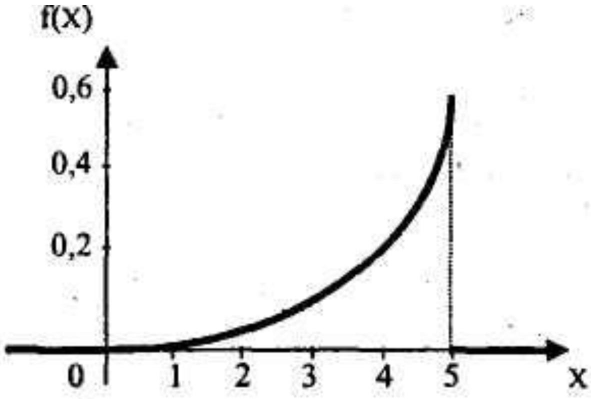

Рис. 15.2. Дифференциальная функция случайной величины *X*

16. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Равномерный закон распределения. *СВ X* распределена по *равномерному (прямоугольному) закону,* если все значения *СВ* лежат внутри некоторого интервала и все они равновероятны (точнее, обладают одной плотностью вероятности). Например, если весы имеют точность 1 г и полученное значение округляется до ближайшего целого числа *k*, то точный вес можно считать равномерно распределенной *СВ* на интервале (*k*-0,5; *k*+0,5).

Дифференциальная функция равномерного закона на интервале $\alpha,\ \beta$ (рис. 16.1):

$$f\ \ x\ =\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le\alpha, \\ \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{при} \quad \alpha\le x\le\beta, \\ 0 & \text{при} \quad x>\beta. \end{cases} \qquad (16.1)$$

Интегральная функция равномерного закона на интервале $\alpha,\ \beta$ (рис. 16.1).

$$F\ \ x\ =\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\le\alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \textit{при} \quad \alpha< x\le\beta, \\ 1 & \textit{при} \quad x>\beta. \end{cases} \qquad (16.2)$$

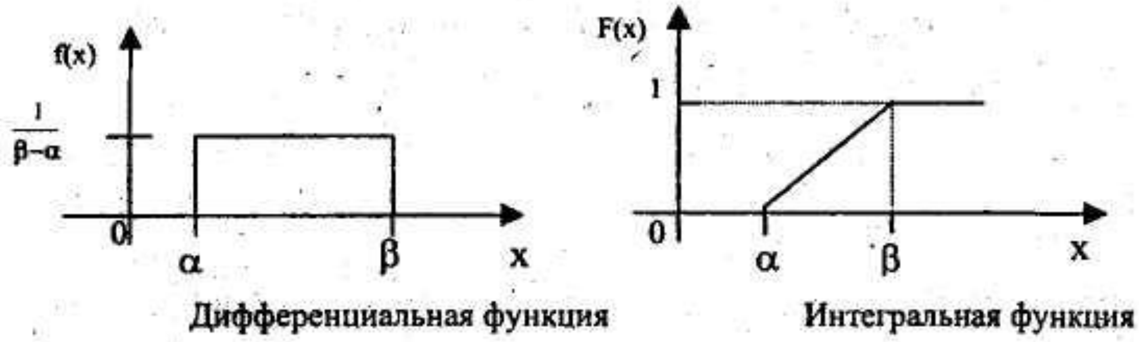

Рис. 16.1. Равномерный закон распределения

Основные числовые характеристики равномерного закона:

1. Математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}=\frac{\beta+\alpha}{2}.$$

2. Дисперсия: $D(X)=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)\,dx-\left(M(X)\right)^2=\int_{\alpha}^{\beta} x^2\frac{1}{\beta-\alpha}dx-\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2=$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{\alpha}^{\beta}-\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{\beta-\alpha}\frac{1}{3}\left(\beta^3-\alpha^3\right)-$$

$$-\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\left(\beta^2+\alpha\beta-\alpha^2\right)-$$

$$-\left(\frac{\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2}{4}\right)=\left(\frac{\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2}{12}\right)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)=\sqrt{D}=\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$.

3. Вероятность попадания *СВ* в заданный интервал (*a; b*).

Пусть *СВ X* распределена по равномерному закону, тогда (рис. 16.2):

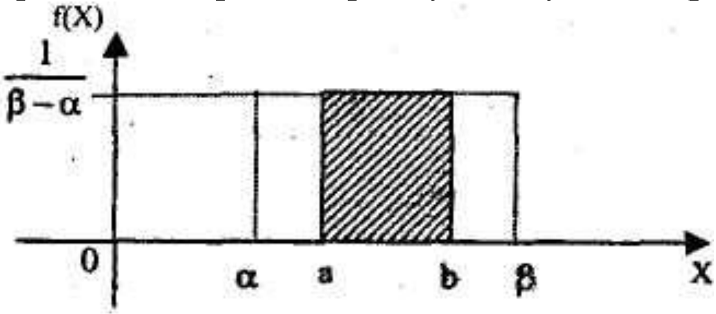

Рис. 16.2. Вероятность попадания равномерно распределенной *СВ X* в (*a; b*)

$$P(a\le X<b)=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_a^b 1dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left.x\right|_a^b=\frac{b-a}{\beta-\alpha}.$$

Показательное распределение. *НСВ X*, принимающая неотрицательные значения, имеет показательное распределение, если ее дифференциальная функция имеет вид (рис. 16.3):

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad(16.3)$$

где $\lambda=\text{const}$, $\lambda>0$.

Интегральная функция показательного закона (рис. 16.3):

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\qquad(16.4)$$

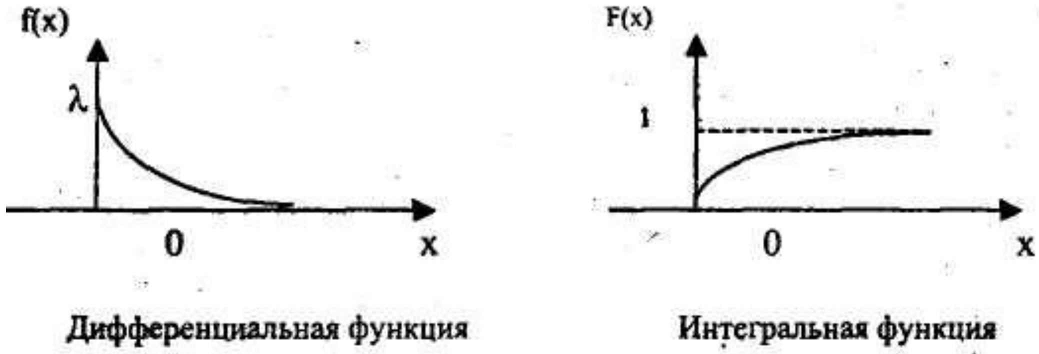

Рис. 16.3. Показательный закон

Числовые характеристики показательного закона:

1. математическое ожидание $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$;

2. дисперсия: $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$;

среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D}=\dfrac{1}{\lambda}$;

3. вероятность попадания *СВ X* в заданный интервал:

$$P(a\le x<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}. \qquad (16.5)$$

Нормальный закон распределения (рис. 16.4) играет исключительную роль в теории вероятностей. Это наиболее часто встречающийся закон распределения, главная особенность которого – то, что он является предельным законам, к которому, при определенных условиях, приближаются другие законы распределения.

Дифференциальная функция нормального закона имеет вид (рис. 16.4):

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (16.6)$$

Числовые характеристики нормального закона:

1. математическое ожидание характеризует центр распределения:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\text{a}\text{, где } e^x=\exp(x);$$

2. дисперсия характеризует форму распределения;

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)\,dx-(M(X))^2=\sigma^2.$$

3. вероятность попадания нормального распределенной случайной величины в заданный интервал определяется по свойству интегральной функции:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi^*\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (16.7)$$

где $\Phi^*(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\dfrac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)dt$ - интегральная функция нормального закона (рис. 16.4);

$\Phi(x)$ - функция Лапласа.

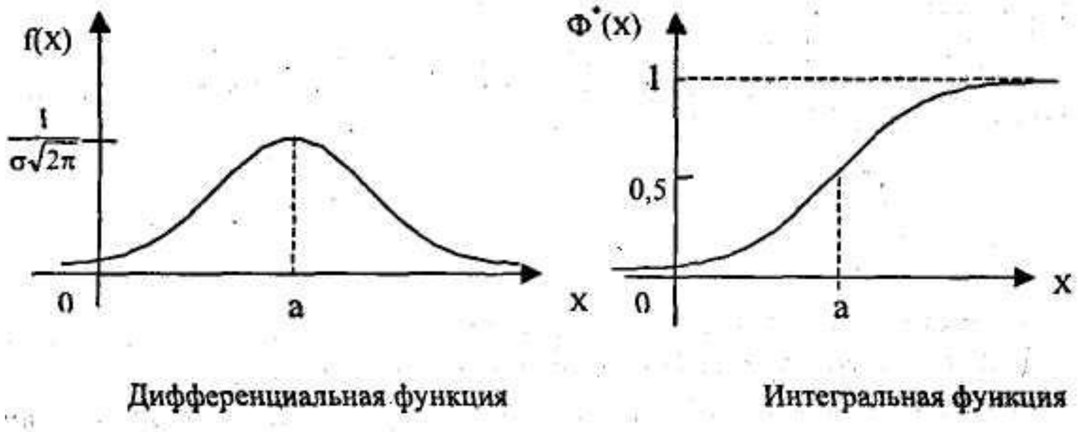

Рис. 16.4. Нормальный закон распределения

Пример 16.1. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение. Воспользуемся формулой (16.7). По условию $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, следовательно:

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0{,}4772$.

Отсюда искомая вероятность $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}954$.

Вероятность заданного отклонения. Правило трех сигм.

Найдем вероятность того, что случайная величина *X*, распределенная по нормальному закону, отклонится от математического ожидания $M(X) = a$ не более чем на величину $\varepsilon > 0$.

$$P(|x - \mathrm{a}| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < x - \mathrm{a} < +\varepsilon) = P(\mathrm{a} - \varepsilon < x < \mathrm{a} + \varepsilon) =$$

$$= \Phi^*\left(\frac{\mathrm{a}+\varepsilon-\mathrm{a}}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\mathrm{a}+\varepsilon-\mathrm{a}}{\sigma}\right) = \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1,$$

или, используя функцию Лапласа:

$$P(|X - \mathrm{a}| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Найдем вероятность того, что нормально распределенная случайная величина *X* отклонится от $M(X) = a$ на σ, 2σ, 3σ:

$$P(|x - \mathrm{a}| < \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

$$P\left(|x-\mathrm{a}|<2\sigma\right)=2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0,4772=0,9544.$$

$$P\left(|x-\mathrm{a}|<3\sigma\right)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0,4965=0,9973.$$

Отсюда следует *правило* 3σ: если случайная величина X имеет нормальное распределение, то отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превышает утроенное среднее квадратическое отклонение (3σ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Большакова Л.В. Теория вероятностей для экономистов: учеб. пособие / Л.В. Большакова. – М.: Финансы и статистика, 2009.-208 с.: ил.

2.Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. 11-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2009. – 404 с.

3.Горелова, Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: Учебное пособие для вузов (Изд. 3-е, доп. и перераб.)/Серия «Высшее образование». – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 480 с., илл.

Приложение 1

Таблица значений локальной функции Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0631	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	2519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\varphi(x \geq 4) = 0; \qquad \varphi(-x) = \varphi(x).$$

Приложение 2

Таблица значений интегральной функции Лапласа

$$\Phi\ x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{\frac{r^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.21	0.0832	0.42	0.1628	0.63	0.2357
0.01	0.0040	0.22	0.0871	0.43	0.1664	0.64	0.2389
0.02	0.0080	0.23	0.0910	0.44	0.1700	0.65	0.2422
0.03	0.0120	0.24	0.0948	0.45	0.1736	0.66	0.2454
0.04	0.0160	0.25	0.0987	0.46	0.1772	0.67	0.2486
0.05	0.0199	0.26	0.1026	0.47	0.1808	0.68	0.2517
0.06	0.0239	0.27	0.1064	0.48	0.1844	0.69	0.2549
0.07	0.0279	0.28	0.1103	0.49	0.1879	0.70	0.2580
0.08	0.0319	0.29	0.1141	0.50	0.1915	0.71	0.2611
0.09	0.0359	0.30	0.1179	0.51	0.1950	0.72	0.2642
0.10	0.0398	0.31	0.1217	0.52	0.1985	0.73	0.2673
0.11	0.0439	0.32	0.1255	0.53	0.2019	0.74	0.2703
0.12	0.0478	0.33	0.1293	0.54	0.2054	0.75	0.2734
0.13	0.0517	0.34	0.1331	0.55	0.2088	0.76	0.2764
0.14	0.0557	0.35	0.1368	0.56	0.2123	0.77	0.2794
0.15	0.0596	0.36	0.1406	0.57	0.2157	0.78	0.2823
0.16	0.0638	0.37	0.1443	0.58	0.2190	0.79	0.2852
0.17	0.0675	0.38	0.1480	0.59	0.2224	0.80	0.2881
0.18	0.0714	0.39	0.1517	0.60	0.2257	0.81	0.2910
0.19	0.0753	0.40	0.1554	0.61	0.2291	0.82	0.2939
0.20	0.0793	0.41	0.1591	0.62	0.2324	0.83	0.2967
0.84	0.2995	1.10	0.3643	1.36	0.4131	1.62	0.4474
0.85	0.3023	1.11	0.3665	1.37	0.4147	1.63	0.4484
0.86	0.3051	1.12	0.3686	1.38	0.4162	1.64	0.4495
0.87	0.3078	1.13	0.3708	1.39	0.4177	1.65	0.4505
0.88	0.3106	1.14	0.3729	1.40	0.4192	1.66	0.4515
0.89	0.3133	1.15	0.3749	1.41	0.4207	1.67	0.4525
0.90	0.3159	1.16	0.3770	1.42	0.4222	1.68	0.4535
0.91	0.3186	1.17	0.3790	1.43	0.4236	1.69	0.4545
0.92	0.3212	1.18	0.3810	1.44	0.4251	1.70	0.4554
0.93	0.3238	1.19	0.3830	1.45	0.4265	1.71	0.4564
0.94	0.3264	1.20	0.3849	1.46	0.4279	1.72	0.4573
0.95	0.3289	1.21	0.3869	1.47	0.4292	1.73	0.4582
0.96	0.3315	1.22	0.3883	1.48	0.4306	1.74	0.4591

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.97	0.3340	1.23	0.3907	1.49	0.4319	1.75	0.4599
0.98	0.3365	1.24	0.3925	1.50	0.4332	1.76	0.4608
0.99	0.3389	1.25	0.3944	1.51	0.4345	1.77	0.4616
1.00	0.3413	1.26	0.3962	1.52	0.4357	1.78	0.4625
1.01	0.3438	1.27	0.3980	1.53	0.4370	1.79	0.4633
1.02	0.3461	1.28	0.3997	1.54	0.4382	1.80	0.4641
1.03	0.3485	1.29	0.4015	1.55	0.4394	1.81	0.4649
1.04	0.3508	1.30	0.4032	1.56	0.4406	1.82	0.4656
1.05	0.3581	1.31	0.4049	1.57	0.4418	1.83	0.4664
1.06	0.3554	1.32	0.4066	1.58	0.4429	1.84	0.4671
1.07	0.3577	1.33	0.4082	1.59	0.4441	1.85	0.4678
1.08	0.3599	1.34	0.4099	1.60	0.4452	1.86	0.4686
1.09	0.3621	1.35	0.4115	1.61	0.4463	1.87	0.4693
1.88	0.4699	2.12	0.4830	2.48	0.4934	2.84	0.4977
1.89	0.4706	2.14	0.4838	2.50	0.4938	2.86	0.4979
1.90	0.4713	2.16	0.4846	2.52	0.4941	2.88	0.4980
1.91	0.4719	2.18	0.4854	2.54	0.4945	2.90	0.4981
1.92	0.4726	2.20	0.4861	2.56	0.4948	2.92	0.4982
1.93	0.4732	2.22	0.4868	2.58	0.4951	2.94	0.4984
1.94	0.4338	2.24	0.4875	2.60	0.4953	2.96	0.4985
1.95	0.4744	2.26	0.4881	2.62	0.4956	2.98	0.4986
1.96	0.4750	2.28	0.4887	2.64	0.4959	3.00	0.49865
1.97	0.4756	2.30	0.4893	2.66	0.4961	3.20	0.49931
1.98	0.4761	2.32	0.4898	2.68	0.4963	3.40	0.49966
1.99	0.4767	2.34	0.4904	2.70	0.4965	3.60	0.49984
2.00	0.4772	2.36	0.4909	2.72	0.4967	3.80	0.49993
2.02	0.4783	2.38	0.4913	2.74	0.4969	4.00	0.49997
2.04	0.4793	2.40	0.4918	2.76	0.4971	4.50	0.49999
2.06	0.0.480	2.42	0.4922	2.78	0.4973	5.00	0.50000
2.08	0.4812	2.44	0.4927	2.80	0.4974		
2.10	0.4821	2.46	0.4931	2.82	0.4976		

$$\Phi(x>5)=0,5;$$

$$\Phi(-x)=-\Phi(x).$$

Крюкова Татьяна Владимировна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методическое пособие для студентов направлений
КТМ и ТМО дневной формы обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 30.12.2014. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 2,81. Тираж 50 экз. Зак. 141344 Рег. № 199.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.